УДК 535.3;531.1
DOI 10.17150/1993-3541.2015.25(1).141-148

А. В. БОРОВСКИЙ
Байкальский государственный университет экономики и права, г. Иркутск, Российская Федерация
А. Л. ГАЛКИН
Институт общей физики РАН им. А. М. Прохорова, г. Москва, Российская Федерация

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ОСНОВАННЫЕ НА РЕЛЯТИВИСТСКОМ УРАВНЕНИИ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ В ЛАЗЕРНОЙ ФИЗИКЕ

Аннотация. В статье исследуется иерархия теоретических моделей, описывающих ускорение электронов в фокусе лазерного импульса с релятивистской интенсивностью излучения. Последовательность моделей включает волновое уравнение Дирака и его классический предел — релятивистское уравнение Гамильтона–Якоби (РГЯ). Рассмотрен π-комплекс для обезразмеренного линейного уравнения Дирака. Показано, что уравнение Дирака имеет смысл применять только на расстояниях порядка комптоновской длины волны. Для описания явлений в фокусе лазерного импульса уравнение Дирака избыточно, достаточно использовать уравнение РГЯ. Последнее представлено в эйлеровой и лагранжевой постановках. При этом переход к лагранжевой постановке осуществляется взятием градиента от уравнения РГЯ, записанного в эйлеровой постановке. Прослежено как уравнение РГЯ в лагранжевой постановке сводится к релятивистскому уравнению движения отдельного электрона под воздействием силы Лоренца. Получено уравнение РГЯ в эйлеровой постановке для гауссова пучка и линейной поляризации лазерного излучения. Разработанную теоретическую модель предлагается использовать в вычислительных задачах лазерной физики.

Ключевые слова. Волновое уравнение Дирака; релятивистское уравнение Гамильтона–Якоби; вектор-потенциал гауссова лазерного пучка.

Информация о статье. Дата поступления 30 ноября 2014 г.; дата принятия к печати 26 декабря 2014 г.; дата онлайн-размещения 27 февраля 2015 г.

A. V. BOROVSKY
Baikal State University of Economics and Law, Irkutsk, Russian Federation
A. L. GALKIN
General Physics Institute of RAS n.a. A.M. Prokhorov, Moscow, Russian Federation

MATHEMATICAL MODELS BASED ON THE RELATIVISTIC HAMILTON-JACOBI EQUATION IN LASER PHYSICS

Abstract. The article considers the hierarchy of theoretical models describing the acceleration of electrons in focus of a relativistic intensity laser pulse. The sequence of models includes the Dirac wave equation and its classic limit — the relativistic Hamilton-Jacobi equation (RHJ). The π-complex intended for the dimensionless linear Dirac equation is considered. It is shown that the Dirac equation can be applied only at the Compton wavelength distances. The Dirac equation is surplus for description of the phenomena in a laser pulse focus, and the RHJ equation should be used instead. The last is examined in Euler's and Lagrange's formulations. The transit to Lagrange's formulations realized by taking the gradient from the RHJ equation written in the Euler's formulation. It is shown that the RHJ equation in Lagrange's formulation reduces to a relativistic equation of a separate electron motion under the Lorentz force law. The RHJ equations received in Euler's formulation for a Gaussian beam and linear polarization of laser radiation. It is suggested that the devised theoretical model be used in laser physics calculable tasks.

Keywords. Dirac wave equation; relativistic Hamilton-Jacobi equation; vector potential of Gaussian laser beam.

Article info. Received November 30, 2014; accepted December 26, 2014; available online February 27, 2015.

Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy, 2015, vol. 25, no. 1, pp. 141–148. ISSN 1993-3541

Известия Иркутской государственной экономической академии. 2015. Т. 25, № 1. С. 141–148. ISSN 1993-3541

Одной из актуальных проблем лазерной физики является ускорение электронов в фокусе ультракороткого лазерного импульса. Часто лазерный импульс фокусируют в разреженный газ. Электроны, образующиеся в таком газе, взаимодействуют только с электромагнитной волной и не взаимодействуют друг с другом. Поэтому можно применять модели, описывающие движение отдельных электронов в заданном электромагнитном поле. Перспективной математической моделью для описания движения электронов в заданном поле произвольной интенсивности является релятивистское уравнение Гамильтона-Якоби (РГЯ) [5].

Решения уравнения РГЯ для линейно и циркулярно поляризованной плоской волны без ограничения на величину ее амплитуды представлены в исследовании Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [Там же]. Параметрические уравнения для траектории электрона, движущегося в поле линейно-поляризованной плоской монохроматической волны, получены и исследованы численно А. В. Боровским [3]. Актуальные исследования движения электронов в полях релятивистской интенсивности, опирающиеся на уравнения релятивистской электродинамики бесстолкновительного электронного газа, описаны А. В. Боровским и А. Л. Галкиным [2]. Там же можно найти библиографию по данному вопросу до 1995 г.

Альтернативное изучение движения электронов в фокусе гауссова импульса предпринято B. Quesnel и P. Mora. Авторы исследуют возможность введения пондеромоторной силы при релятивистских интенсивностях излучения и условия применимости этой концепции, а также делают вывод об усложненном характере движения электронов вне пределов применимости понятия пондеромоторной силы [11].

Y. I. Salamin, G. R. Mocken, C. H. Keitel анализируют движение одного электрона в трехмерном пространстве вблизи гауссова фокуса [12], а также выводят выражения для полей вблизи фокуса, повторяя исследования B. Quesnel и P. Mora [11].

Постановка задачи об ускорении электронов, полученных при многофотонной ионизации многозарядных ионов, описана A. Maltsev и T. Ditmire [10]. При этом были использованы формулы для скорости многофотонной ионизации, расчеты проведены методом Монте-Карло. Представлен двухпичковый угловой энергетический спектр. Причину возникновения пичков авторы не обсуждают. Сделан вывод о необходимости учета продольной компоненты лазерного поля. Приведено сравнение расчетов с этой компонентой и без нее. Кулоновское поле многозарядного иона не учитывается.

S. Masuda, M. Kando, H. Kotaki, K. Nakajima изучают движение одного электрона в трехмерном пространстве вблизи фокуса гауссова импульса, рассматривают необходимость учета продольной компоненты лазерного поля, которая существенно влияет на траекторию движения электронов. Меняют начальную координату электрона. Начальную скорость электрона полагают равной нулю [13]. Набранной статистики в данной работе явно недостаточно, поэтому авторы делают упор на качественных вещах (таких как учет продольной компоненты поля на движение одного электрона), пишут о возможности получения сгустка ускоренных электронов вдоль оси.

S. X. Hu, A. F. Starace сформулировали модель ускорения электрона в суммарном поле лазерного импульса и кулоновском поле многозарядного иона [9]. Наряду с этим изучают начальные условия для численного счета. Расчеты проводятся методом Монте-Карло. Задаются статистические распределения начальных условий для ионизованного электрона. Интервалы начальных параметров разбиваются на равные промежутки, электроны распределяются по интервалам с учетом распределений. Проводится расчет траекторий для каждого электрона и вычисляется остаточная энергия. Смысл работы в том, что многозарядный ион дополнительно удерживает ионизованный электрон в области сильного поля. В результате электрон успевает разогнаться до большей скорости. Модель лазерного поля [9] совпадает с уравнениями для полей в лазерном пучке [11], а в плоском случае — с уравнениями [6]. Зависимость от азимутального угла в данной работе отсутствует.

K. I. Popov, V. Yu. Bychenkov, W. Rozmus, R. D. Sydora изучают движение одного электрона в трехмерном пространстве вблизи фокуса, образованного отражением плоской волны от параболического зеркала [7]. Отраженную волну рассчитывают с использованием метода функций Грина. Такой расчет носит название дифракции Зоммерфельда-Кирхгофа. Для параболической границы получаются интегралы Стрэттона-Чу для полей. Реализован строгий расчет поля вблизи фокуса. Далее авторы рассчитывают движение одного электрона вблизи

Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy,
2015, vol. 25, no. 1, pp. 141–148. ISSN 1993-3541

Известия Иркутской государственной экономической академии.
2015. Т. 25, № 1. С. 141–148. ISSN 1993-3541

фокуса. Модель движения трехмерная и релятивистская. Делают вывод, что результаты не совпадают с теми, которые получаются для гауссова фокуса.

В работе А. Л. Галкина, В. В. Коробкина, М. Ю. Романовского и О. Б. Ширяева анализируются движение отдельного электрона в поле линейно и циркулярно поляризованного гауссова лазерного импульса, а также особенности траектории электрона, сделан вывод, что траектории имеют мало общего с известными траекториями электрона в поле плоской электромагнитной волны [8]. В последующей их статье описывается излучение электрона, движущегося в поле гауссова лазерного импульса при релятивистских интенсивностях лазерной волны [14].

Далее рассмотрим теоретические основы ускорения электронов лазерным импульсом.

1. *Вывод релятивистского уравнения Гамильтона-Якоби из волнового уравнения Дирака.* Наиболее точно в современной теоретической физике движение отдельного электрона в заданном поле описывает релятивистское волновое уравнение Дирака [1, с. 146, формула (32.7а)]:

$$\left[\begin{array}{c}\left(\dfrac{i\hbar}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}-\dfrac{e}{c}\varphi\right)^2-\left(i\hbar\nabla+\dfrac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2-m^2c^2+\\ +\dfrac{e\hbar}{c}\Sigma\boldsymbol{H}-i\dfrac{e\hbar}{c}\alpha\boldsymbol{E}\end{array}\right]\psi=0, \quad (1)$$

где φ, $\boldsymbol{A}$ — скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля; $\boldsymbol{\Sigma}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ — матричные вектора, компоненты которых составлены из матриц Дирака; $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ —напряженности электрического и магнитного полей; ψ — 4-спинор.

Это уравнение получается операторным перемножением двух сопряженных линейных операторов Дирака [1, с.144–148].

Ищем решение уравнения (1) в виде

$$\psi=ue^{\frac{i}{\hbar}S}, \quad (2)$$

где u — медленно изменяющийся 4-спинор; $S(t,\boldsymbol{r})$ — функция, которую называют действием.

При применении оператора, стоящего внутри квадратных скобок в формуле (1), к функции (2) возникает выражение, представляющее собой разложение по степеням $\hbar$. В нашем случае рассмотрим только слагаемое, не зависящее от $\hbar$. В силу малости величины последующие слагаемые разложения учитывать не будем. Применим первую круглую скобку к выражению (2) один раз

$$\left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{e}{c}\varphi\right)\psi=$$

$$=\frac{i\hbar}{c}e^{\frac{i}{\hbar}S}\frac{\partial u}{\partial t}-\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\varphi\right)\frac{1}{c}\psi\to-\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\varphi\right)\frac{1}{c}\psi.$$

Второй раз

$$\left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{e}{c}\varphi\right)^2\psi\to\left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{e}{c}\varphi\right)\times$$

$$\times\left\{-\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\varphi\right)\frac{1}{c}\psi\right\}\to\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\varphi\right)^2\psi.$$

Аналогично поступим со второй скобкой

$$\left(i\hbar\nabla+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2\psi\to\left(\nabla S-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2\psi.$$

В результате для слагаемого, не зависящего от $\hbar$, в разложении уравнения (1) получаем

$$\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\varphi\right)^2-\left(\nabla S-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2-m^2c^2\right]\psi=0.$$

Перед 4-спинором ψ стоит скаляр, поэтому

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\varphi\right)^2-\left(\nabla S-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2-m^2c^2=0; \quad (3)$$

$$\boldsymbol{g}=\nabla S=\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A};\ \ \varepsilon=\frac{\partial S}{\partial t}+e\varphi.$$

Мы получили классическое уравнение РГЯ. Уравнение (3) приведено в [5, с.68].

Второе слагаемое в разложении уравнения (1) по степеням представляет собой уравнение Паули для спина [1, с. 150, формула (33.7)].

2. *Вектор-потенциал гауссова пучка.* Теорию гауссовых пучков можно найти в книгах [4; 6]. Гауссовы пучки — это строгие решения параболического уравнения. Целесообразно записывать параболическое уравнение для векторного потенциала. Дело в том, что векторный потенциал электромагнитного поля в кулоновской калибровке напрямую удовлетворяет волновому уравнению, следовательно, для пучков — параболическому уравнению. Электрическое поле находится дифференцированием векторного потенциала по времени и умножением на –1. Это в частности означает, что направления компонент электрического поля и векторного потенциала совпадают с точностью до знака. Магнитное поле находится как ротор от векторного потенциала. Если известно электрическое поле, то векторный потенциал можно найти, интегрируя по времени электрическое поле в выражении для гауссова

Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy, 2015, vol. 25, no. 1, pp. 141–148. ISSN 1993-3541

Известия Иркутской государственной экономической академии. 2015. Т. 25, № 1. С. 141–148. ISSN 1993-3541

пучка и отбрасывая константу интегрирования, зависящую от координат, поскольку среднее от векторного потенциала должно равняться нулю.

Берем выражение для гауссова пучка [11]:

$$E_x = E_0 \frac{\rho_0}{\rho} e^{-\frac{r^2}{\rho^2}} \sin(\varphi_g); \tag{4}$$

$$E_z = 2E_0 \varepsilon \frac{x\rho_0}{\rho^2} e^{-\frac{r^2}{\rho^2}} \cos(\varphi_g^{(1)});$$

$$\rho = \rho_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}};$$

$$\varphi_g = \omega t - kz + arctg\left(\frac{z}{z_R}\right) - \frac{zr^2}{z_R \rho^2} - \varphi_0;$$

$$\varphi_g^{(1)} = \varphi_g + arctg\left(\frac{z}{z_R}\right),$$

где E_0 — амплитуда напряженности электрического поля в начале координат; ω и k — частота и волновой вектор лазерного излучения; $z_R = \pi\rho_0^2/\lambda$ — рэлеевская длина; ρ_0 — поперечный размер минимальной гауссовой перетяжки в фокальной плоскости; φ_0 — значение фазы в момент времени $t = 0$, в точке $z = 0$; ε — малый параметр.

При записи выражения (4) выбрана декартова система координат с центром в фокальной плоскости $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Оси x и y системы координат лежат в фокальной плоскости. Ось z перпендикулярна фокальной плоскости и совпадает с осью лазерного пучка.

Поскольку

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A},$$

то получаем интегрированием по времени

$$A_x = A_0 \frac{\rho_0}{\rho} e^{-\frac{r^2}{\rho^2}} \cos(\varphi_g); \tag{5}$$

$$A_z = -2A_0 \varepsilon \frac{x\rho_0}{\rho^2} e^{-\frac{r^2}{\rho^2}} \sin(\varphi_g^{(1)}).$$

Частоту, на которую делится выражение, ввели в A_0.

Поскольку фаза произвольна, выделяем из нее слагаемое $3\pi/2$. Используя в выражении (5) формулы приведения, получим в результате следующие формулы, которые по своему виду просто совпадают с формулами для электрического поля в гауссовом пучке:

$$A_x = A_0 \frac{\rho_0}{\rho} e^{-\frac{r^2}{\rho^2}} \sin(\varphi_g); \tag{6}$$

$$A_z = 2A_0 \varepsilon \frac{x\rho_0}{\rho^2} e^{-\frac{r^2}{\rho^2}} \cos(\varphi_g^{(1)}).$$

Таким образом, в случае линейно-поляризованной волны, вектор потенциал (6) имеет в гауссовом пучке компоненты A_x (большая) и A_z (малая). Компонента $A_y = 0$.

3. *На каких масштабах применимо уравнение Дирака*. Интенсивность в центре фокальной перетяжки для гауссова пучка (максимальная интенсивность) составляет

$$I_0 = \frac{c}{8\pi} E_0^2. \tag{7}$$

Максимальная амплитуда векторного потенциала связана с максимальной напряженностью электрического поля соотношением

$$A_0 = \frac{cE_0}{\omega} = \frac{E_0}{k} = \frac{\lambda}{2\pi} E_0. \tag{8}$$

Поскольку

$$E_0 = \sqrt{\frac{8\pi I_0}{c}},$$

то, используя выражения (7) и (8), найдем

$$A_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{8\pi I_0}{c}}. \tag{9}$$

Интенсивность в формуле (9) целесообразно сравнивать с релятивистским значением интенсивности

$$I_r = \frac{m^2 c^3 \omega^2}{4\pi e^2}. \tag{10}$$

Напомним, что при $I = I_r$ масса электрона, осциллирующего в поле циркулярно поляризованной волны, увеличивается в $\sqrt{2}$ раз [3].

Введем параметр

$$\alpha = \frac{I_0}{I_r}, \tag{11}$$

который показывает, во сколько раз максимальная интенсивность в фокальной перетяжке гауссова пучка превышает релятивистское значение интенсивности. В уравнении (9) значение I_0 разделим и умножим на I_r. В результате, используя формулы (10) и (11), получим

$$A_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{8\pi \left(I_0 / I_r\right) I_r}{c}} = \sqrt{2}\frac{mc^2}{e}\sqrt{\alpha} = = 2{,}411 \cdot 10^{-17} \sqrt{\alpha}\, \frac{\textit{эрг}}{\textit{ед. заряда в СГСЭ}}. \tag{12}$$

Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy, 2015, vol. 25, no. 1, pp. 141–148. ISSN 1993-3541

Известия Иркутской государственной экономической академии. 2015. Т. 25, № 1. С. 141–148. ISSN 1993-3541

Выпишем далее линейное уравнение Дирака

$$\left[\gamma\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}+\frac{e}{c}A_0\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})-mc\right]\psi(\boldsymbol{x})=0,$$

где $x = x_0, x_1, x_2, x_3$; $x_0 = ct$. Вводим нормированную переменную

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\frac{\boldsymbol{x}}{x_н};\quad \boldsymbol{x}=\tilde{\boldsymbol{x}}x_н;$$

$$\left[\gamma\left(i\frac{\partial}{\partial\tilde{\boldsymbol{x}}}+\frac{ex_н}{c\hbar}A_0\boldsymbol{a}(\tilde{\boldsymbol{x}})\right)-\frac{mcx_н}{\hbar}\right]\psi(\tilde{\boldsymbol{x}})=0$$

и получаем π-комплекс задачи:

$$\left[\gamma\left(i\frac{\partial}{\partial\tilde{\boldsymbol{x}}}+\pi_1\boldsymbol{a}(\tilde{\boldsymbol{x}})\right)-\pi_2\right]\psi(\tilde{\boldsymbol{x}})=0; \qquad (13)$$

$$\pi_1=\frac{ex_н}{c\hbar}A_0;\quad \pi_2=\frac{mcx_н}{\hbar}.$$

Целесообразно выбрать в (13)

$$\pi_1=\frac{ex_н}{c\hbar}A_0=1,$$

отсюда с учетом выражения (12)

$$x_н=\frac{c\hbar}{eA_0}=\frac{\lambda_c}{\sqrt{2\alpha}},$$

где $\lambda_c=\hbar/mc=3{,}862\cdot10^{-11}$ — комптоновская длина волны. Подставив $x_н$ в выражение для π_2, найдем

$$\pi_2=\frac{mcx_н}{\hbar}=\frac{mc^2}{eA_0}=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}.$$

Таким образом, π-комплекс для линейного уравнения Дирака (13) составляет

$$\pi_1=1;\quad \pi_2=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}. \qquad (14)$$

При условии выполнения (14) константа обезразмеривания $x_н$ сравнима с комптоновской длиной волны. Отсюда следует, что уравнение Дирака применимо только на расстояниях порядка комптоновской длины волны. Размеры атома порядка 10^{-8} см. Даже для атомов релятивистские эффекты будут порядка 10^{-3} (отношение комптоновской длины волны к размерам атома). В фокусе лазерного импульса размеры составляют порядок длины волны излучения $\lambda = 10^{-4}$ см. Для таких задач релятивистские поправки к движению электронов, обусловленные уравнением Дирака, будут пренебрежимо малы. Это означает, что рассматривая ускорение электронов в фокусе лазерного импульса, можно применять классическую (неквантовую) электродинамику, в частности, уравнение РГЯ (3).

4. *Уравнение РГЯ в лазерной физике.* Лазерное излучение представляет собой электромагнитное вихревое поле, поэтому потенциал $\varphi = 0$. Уравнение РГЯ (3) принимает вид:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-\left(\nabla S-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2-m^2c^2=0; \qquad (15)$$

$$\boldsymbol{g}=\nabla S=\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A};\quad \varepsilon=\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Уравнение (15) можно разрешить относительно производной по времени

$$\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}=\pm\sqrt{\left(\nabla S-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2+m^2c^2}. \qquad (16)$$

Два знака означают возможность существования частиц с положительной и отрицательной энергией. Мы не имеем возможности рассматривать теорию электрон-позитронного мира, предложенную Дираком. Рассмотрим движение в лазерном поле свободных электронов. В этом случае в выражении (16) следует выбрать знак «+».

Квадрат вектора означает скалярное перемножение вектора на самого себя. Это есть квадрат модуля вектора, который равен сумме квадратов его компонент. Получается дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка по времени со сложной зависимостью от поперечной координаты. В уравнении (16) можно раскрыть квадрат под радикалом

$$\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}=\sqrt{(\nabla S)^2-2\frac{e}{c}(\boldsymbol{A}\nabla S)+\frac{e^2}{c^2}\boldsymbol{A}^2+m^2c^2}\ . \qquad (17)$$

В ультрарелятивистском случае, когда в формуле (17) массой покоя частицы можно пренебречь, приходим к уравнению

$$\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}=\left|\nabla S-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right|.$$

5. *Уравнение РГЯ для гауссова пучка с линейной поляризацией.* В гауссовом пучке с линейной поляризацией существуют только две компоненты вектор-потенциала A_x, A_z:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}=$$

$$=\sqrt{\left|\boldsymbol{e_x}\left(\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{e}{c}A_x\right)+\boldsymbol{e_y}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)+\boldsymbol{e_z}\left(\frac{\partial S}{\partial z}-\frac{e}{c}A_z\right)\right|^2+m^2c^2}.$$

Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy,
2015, vol. 25, no. 1, pp. 141–148. ISSN 1993-3541

Известия Иркутской государственной экономической академии.
2015. Т. 25, № 1. С. 141–148. ISSN 1993-3541

Раскрывая квадрат, получим

$$\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}= \\ =\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{e}{c}A_x\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}-\frac{e}{c}A_z\right)^2+m^2c^2}; \qquad (18)$$

$$\boldsymbol{g}=\nabla S=\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}; \quad \varepsilon=\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Представим также еще одну полезную для дальнейших исследований форму уравнения РГЯ. Для упрощения записи положим далее $c = 1$, $e = 1$. Возведем в квадрат круглые скобки в выражении (18)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2+ \\ +2A_x\frac{\partial S}{\partial x}+2A_z\frac{\partial S}{\partial z}=m^2+(A_x)^2+(A_z)^2.$$

Полученное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка параметрического типа (пятое и шестое слагаемые) с вынуждающей силой (правая часть).

6. *Вывод из уравнения РГЯ выражения для силы Лоренца, действующей на электрон в электромагнитном поле.* Используем систему единиц $c = 1$, $e = 1$. Уравнение РГЯ (15) запишем в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-\left(\nabla S-\boldsymbol{A}\right)^2-m^2=0,$$

где S и $\boldsymbol{A}$ — скаляр и вектор, зависящие от координат и времени; $S = S(\boldsymbol{r}, t)$; $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$.

Вычислим градиент от полученного уравнения

$$\nabla\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2=2\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \nabla S}{\partial t}\right)=2\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t}.$$

Обозначим

$$\varepsilon(\boldsymbol{r},t)=\frac{\partial S(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t)=\nabla S(\boldsymbol{r},t).$$

Далее

$$\nabla(\nabla S-\boldsymbol{A})^2=\nabla((\nabla S-\boldsymbol{A})(\nabla S-\boldsymbol{A}))= \\ =\nabla[(\nabla S)^2-2(\boldsymbol{A}\nabla S)+\boldsymbol{A}^2];$$

$$\nabla(\nabla S)^2=\nabla(\nabla S\nabla S).$$

Для вычисления градиента от скалярного произведения векторов воспользуемся формулой векторного анализа

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+ \\ +\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a}).$$

В данном случае $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\nabla S=\boldsymbol{g}$. Ротор от градиента равен нулю $\nabla\times\nabla S=0$. В результате получим $\nabla(\nabla S)^2=\nabla(\nabla S\cdot\nabla S)=2(\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}$. Затем $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\nabla S)=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}+(\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{g}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$. Одно из слагаемых выпадает, поскольку ротор от градиента равен нулю $\nabla\boldsymbol{A}^2=\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})=2(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$.

Собирая вычисленные производные, найдем

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t}=(\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}-(\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-\boldsymbol{g}\times \\ \times(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}).$$

В теории электромагнетизма в отсутствие потенциальных полей

$$\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A}; \quad \boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}.$$

Вычтем из левой и правой частей уравнения выражение

$$\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

и введем комбинацию $\boldsymbol{g}-\boldsymbol{A}$, получим

$$\frac{\partial(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{A})}{\partial t}=-\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+ \\ +((\boldsymbol{g}-\boldsymbol{A})\nabla)(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{A})-(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{H}.$$

Согласно курсу теории поля [1, с. 63–64] величина представляет собой обобщенный импульс $\boldsymbol{g}=\nabla S=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{A}$, где $\boldsymbol{p}$ — импульс частицы. Подставив в выражение, получим

$$\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t}=-\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{H}.$$

Скорость частицы связана с импульсом соотношением

$$\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{p}}{\varepsilon}.$$

Поделив на ε, найдем

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t}=-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{p}-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}.$$

В уравнении РГЯ можно одновременно поменять знаки у ∇S и вектора $\boldsymbol{A}$ или, что то же самое, у векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{A}$, при этом уравнение РГЯ не изменится. Учитывая это, получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{p}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H};$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}. \qquad (19)$$

Правая часть релятивистского уравнения (19) представляет собой выражение для силы Лоренца, действующей на заряженную частицу.

Таким образом, в данной статье рассмотрена иерархия теоретических моделей,

Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy, 2015, vol. 25, no. 1, pp. 141–148. ISSN 1993-3541

Известия Иркутской государственной экономической академии. 2015. Т. 25, № 1. С. 141–148. ISSN 1993-3541

описывающих движение электронов в фокусе лазерного импульса. Эта иерархия включает релятивистское волновое уравнение Дирака, описывающее электрон во внешнем поле. Классическим пределом уравнения Дирака является уравнение РГЯ. Показано, что уравнение Дирака для решения задачи является избыточным, так как достаточно анализировать и решать уравнение РГЯ. Предлагается вид уравнения РГЯ для электромагнитного поля лазерного излучения. Такое поле является вихревым и в нем отсутствует электрический потенциал. Выписано уравнение РГЯ для линейно поляризованного лазерного излучения, представляющего собой гауссов пучок. Уравнение РГЯ может изучаться в эйлеровой и лагранжевой постановках. Показан теоретический переход от эйлеровой постановки к лагранжевой, который осуществляется взятием градиента от уравнения РГЯ. Строгое уравнение РГЯ в лагранжевой постановке сводится к релятивистскому уравнению движения для электрона, на который действует сила Лоренца.

Следовательно, уравнение РГЯ может выступать в качестве основы численного моделирования ускорения электронов лазерным импульсом.

Список использованной литературы

1. Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика / В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. — М. : Наука, 1980. — 704 с.

2. Боровский А. В. Лазерная физика: рентгеновские лазеры, ультракороткие импульсы, мощные лазерные системы / А. В. Боровский, А. Л. Галкин. — М. : ИздАт, 1996. — 496 с.

3. Боровский А. В. Релятивистские спирали / А. В. Боровский // Применение математических методов и информационных технологий в экономике : сб. науч. тр. — Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2011. — Вып. 10. — С. 14.

4. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны, радио и связь / Л. А. Вайнштейн. — М. : Радио и связь, 1990. — 440 с.

5. Ландау Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Наука, 1973. — 504 с.

6. Ярив А. Квантовая электроника / А. Ярив. — М. : Советское радио, 1980. — 488 с.

7. Electron vacuum acceleration by a tightly focused laser pulse / K. I. Popov, V. Yu. Bychenkov, W. Rozmus, R. D. Sydora // Physics of Plasmas. — 2008. — Vol. 15. — P. 013108. — DOI : 10.1063/1.2830651.

8. Dynamicsofan electron driven by relativistically intense laser radiation / A. L. Galkin, V. V. Korobkin, M. Yu. Romanovsky, O. B. Shiryaev // Physics of Plasmas. — 2008. — Vol. 15, no. 2. — P. 023104. — DOI :10.1063/1.2839349.

9. Hu S. X. Laser acceleration of electrons to giga-electron-volt energies using highly charged ions / S. XHu,A. F. Starace // Physical Review E. — 2006. — Vol. 73, no. 6. — P. 066502. — DOI : 10.1103/PhysRevE.73.066502.

10. Maltsev A. Above Threshold Ionization in Tightly Focused, Strongly Relativistic Laser Fields / A. Maltsev, T. Ditmire // Physical Review Letters. — 2003. —Vol. 90, no. 5.

11. Quesnel B. Theory and simulation of the interaction of ultraintense laser pulses with electrons in vacuum / B. Quesnel, P. Mora // Physical Review. — 1998. —Vol. 58, no. 3. — P. 3719–3732.

12. Salamin Y. I. Electron scattering and acceleration by a tightly focused laser beam / Y. I. Salamin, G. R. Mocken, C. H. Keitel // Physical Review Special — Accelerators and Beams. — 2002. — Vol. 5, no. 10. — P. 9–22.

13. Suppression of electron scattering by the longitudinal components of tightly focused laser fields / S. Masuda, M. Kando, H. Kotaki, K. Nakajima // Physics of Plasmas. — 2005. — Vol. 12. — P. 013102. — DOI : 10.1063/1.1815000.

14. Temporal and Spectral Characteristics of the Radiation Generated by an Electron Driven by a Relativistically Intense Laser Field / A. L. Galkin, M. P. Kalashnikov, V. V. Korobkin, M. Yu. Romanovsky, O. B. Shiryaev, V. A. Trofimov // Contributions to Plasma Physics. — 2011. — Vol. 51, no. 5. — P. 482–490. — DOI : 10.1002/ctpp.201110020.

References

1. Berestetskii V. B., Lifshits E. M., Pitaevskii L. P. *Kvantovaya elektrodinamika* [Quantum electrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 704p.

2. Borovskii A. V., Galkin A. L. *Lazernaya fizika: rentgenovskie lazery, ul'trakorotkie impul'sy, moshchnye lazernye sistemy* [Laser Physics: X-ray lasers, ultrashort pulses, high-power laser systems]. Moscow, IzdAt Publ., 1996. 496p.

3. Borovskii A. V. Relativistic Spirals. *Primenenie matematicheskikh metodov i informatsionnykh tekhnologiy v ekonomike* [Mathematical methods and information technologies application in economics]. Irkutsk, Baikal State University of Economics and Law Publ., 2011. Iss. 10, pp. 14. (InRussian).

4. Vainshtein L. A. *Elektromagnitnye volny, radio isvyaz'* [Electromagnetic waves, radio and communication]. Moscow, Radio I svyaz Publ., 1990. 440p.

5. Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoriya polya* [Field theory]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 504 p.

6. Yariv A. *Kvantovaya elektronika* [Quantum Electronics]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1980. 488 p.

7. Popov K. I., Bychenkov V. Yu., Rozmus W., Sydora R. D. Electron vacuum acceleration by a tightly focused laser pulse. *Physics of Plasmas*, 2008, vol. 15, pp. 013108. DOI: 10.1063/1.2830651.

8. Galkin A. L., Korobkin V. V., Romanovsky M. Yu., Shiryaev O. B. *Dynamics of an electron driven by relativistically intense laser radiation. Physics of Plasmas*, 2008, vol. 15, no. 2, pp. 023104. DOI : 10.1063/1.2839349.

9. Hu S. X., Starace A. F. Laser acceleration of electrons to giga-electron-volt energies using highly charged ions. *Physical Review E*, 2006, vol. 73, no. 6, p. 066502. DOI : 10.1103/PhysRevE.73.066502.

Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy, 2015, vol. 25, no. 1, pp. 141–148. ISSN 1993-3541

Известия Иркутской государственной экономической академии. 2015. Т. 25, № 1. С. 141–148. ISSN 1993-3541

10. Maltsev A., Ditmire T. Above Threshold Ionization in Tightly Focused, Strongly Relativistic Laser Fields. *Physical Review Letters*, 2003, vol. 90, no. 5.

11. Quesnel B., Mora P. Theory and simulation of the interaction of ultraintense laser pulses with electrons in vacuum. *Physical Review*, 1998, vol. 58, no. 3, pp. 3719–3732.

12. Salamin Y. I., Mocken G. R., KeitelC. H. Electron scattering and acceleration by a tightly focused laser beam. *Physical Review Special — Accelerators and Beams*,2002, vol. 5, no. 10, pp. 9–22.

13. Masuda S., Kando M., Kotaki H., Nakajima K.Suppression of electron scattering by the longitudinal components of tightly focused laser fields.*Physics of Plasmas*, 2005, vol. 12, pp. 013102. DOI : 10.1063/1.1815000.

14. Galkin A.L., Kalashnikov M. P., Korobkin V. V., Romanovsky M. Yu., Shiryaev O. B., Trofimov V. A. Temporal and Spectral Characteristics of the Radiation Generated by an Electron Driven by a Relativistically Intense Laser Field. *Contributions to Plasma Physics*, 2011, vol. 51, no. 5, pp. 482–490. DOI : 10.1002/ctpp.201110020.

Информация об авторах

Боровский Андрей Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра информатики и кибернетики, Байкальский государственный университет экономики и права, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

Галкин Андрей Леонидович — доктор физико-математических наук, заведующий сектором, Институт общей физики РАН им. А. М. Прохорова, 119991, г. Москва, ул. Вавилова, 38, e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.

Библиографическое описание статьи

Боровский А. В. Математические модели, основанные на релятивистском уравнении Гамильтона–Якоби в лазерной физике / А. В. Боровский, А. Л. Галкин // Известия Иркутской государственной экономической академии. — 2015. — Т. 25, № 1. — С. 141–148. — DOI : 10.17150/1993-3541.2015.25(1).141-148.

Authors

Andrei V. Borovsky — Doctor habil. (Physical and Mathematical Sciences), Professor, Baikal State University of Economics and Law, 11 Lenin St., 664003, Irkutsk, Russian Federation,e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

Andrei L. Galkin — Doctor habil. (Physical and Mathematical Sciences), Professor, General Physics Institute of RAS n.a. A. M. Prokhorov, 38 Vavilova St., 119991, Moscow, Russian Federation,e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.

Reference to article

Borovsky A. V., Galkin A. L. Mathematical models based on the relativistic Hamilton-Jacobi equation in laser physics. *Izvestiya Irkutskoy gosudarstvennoy ekonomicheskoy akademii = Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy*, 2015, vol. 25, no. 1, pp. 141–148. DOI: 10.17150/1993-3541.2015.25(1).141-148. (In Russian).